20/12/2016

• Διαδικασία Γεννήσεων - Θανάτων

Θεωρούμε μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο και με διακριτό χώρο καταστάσεων, συμβολίζουμε με X_n τη στοχαστική, με $t \in \mathbb{R}^+$ το χρόνο και με X_0 συμβολίζουμε την κατάσταση στην αρχική χρονική στιγμή. Σε όσα ακολουθούν

$P_{ij}^{(t)} = P[X(u+t)=j \mid X(u)=i] = P($να πάω από το i στο j σε χρόνο $t)$.

• Κανόνες που καθορίζουν την αλλαγή των καταστάσεων

$\boxed{1^{ος}}$ $P_{n,n+1}^{(\partial t)}$: Η πιθανότητα από την κατάσταση n να μεταβώ στην $n+1$ σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα ∂t και ισούται με:

$$P_{n,n+1}^{(\partial t)} = \lambda_n \cdot \partial t + o(\partial t)$$

λ_n: μια θετική σταθερά που δείχνει ρυθμό γεννήσεων

$o(\partial t)$: όροι πολύ μικροί ως προς ∂t, δηλαδή: $\lim_{\partial t \to 0} \frac{o(\partial t)}{\partial t} = 0$

$\boxed{2^{\underline{os}}}$ $P_{nn-1}^{(\delta t)}$: Η Πιθανότητα από την κατάσταση n να μεταβώ στην n-1 σε χρόνο δt και ισούται με:

$$P_{nn-1}^{(\delta t)} = \mu n \cdot \delta t + o(\delta t)$$

→ μια θετική σταθερά που δείχνει ρυθμό θανάτων

$\boxed{3^{\underline{os}}}$ $P_{nj}^{(\delta t)}$ με $j \neq n, n+1, n-1$: Πιθανότητα να συμβούν περισσότερα του ενός γεγονότα σε χρόνο δt και ισούται με:

$$P_{nj}^{(\delta t)} = o(\delta t)$$

$\boxed{4^{\underline{os}}}$

$$P_{nn}^{(\delta t)} = P\left(\begin{array}{l}\text{ούτε γέννηση} \\ \text{ούτε θάνατος} \\ \text{σε μικρό χρονικό} \\ \text{διάστημα } \delta t\end{array}\right) = 1 - \left[\lambda n \cdot \delta t + o(\delta t) + \mu n \cdot \delta t + o(\delta t) + o(\delta t)\right]$$

$$= 1 - (\lambda n + \mu n)\delta t + o(\delta t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \left(\begin{array}{l} o(\delta t) + o(\delta t) + o(\delta t) = o(\delta t) \\ \text{γιατί } o(\delta t) \text{ είναι πολύ} \\ \text{μικρές ποσότητες}\end{array}\right)$$

Τελικά, έχουμε ότι: (i) $P_{nn+1}(\delta t) = \lambda_n \cdot \delta t + o(\delta t)$

(ii) $P_{nn-1}(\delta t) = \mu_n \cdot \delta t + o(\delta t)$

(iii) $P_{nj}(\delta t) = o(\delta t)$, $j \neq n, n-1, n+1$

(iv) $P_{nn}(\delta t) = 1 - (\lambda_n + \mu_n)\delta t + o(\delta t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Ερώτημα: Έστω ότι τη χρονική στιγμή 0, η κατάσταση της στοχαστικής διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων είναι στην κατάσταση i, δηλαδή $X(0) = i$. Ζητάμε την πιθανότητα $P_{in}(t) = P(X(t) = n \mid X(0) = i)$

Σε όσα ακολουθούν για συντομία θα παραλείπουμε το i, δηλαδή θα γράφουμε $P_n(t)$ αντί για $P_{in}(t)$

• Συνδέω το t με το $t + \delta t$:

$P_n(t+\delta t) = P[X(t+\delta t) = n \mid X(0) = i]$ για $n = 1, 2, 3, \dots$

$= P$ (από το $X(0) = i$ να πάω στο $X(t) = n$ και $n \to n$ σε χρόνο δt ή από το $X(0) = i$ να πάω στο $X(t) = n-1$ και $n-1 \to n$ σε δt ή από το $X(0) = i$ να πάω στο $X(t) = n+1$ και $n+1 \to n$ σε χρόνο δt ή από το $X(0) = i$ να πάω στο $X(t) = j$ ($j \neq n, n+1, n-1$) και $j \to n$ σε χρόνο δt)

→ Εφόσον η συγκεκριμένη πιθανότητα περιλαμβάνει το $n-1$ θα πρέπει για την $P_0(t+\delta t)$ να δουλέψουμε ξεχωριστά γιατί αν τη συμπεριλάβουμε σ' αυτή την πιθανότητα θα έχουμε το $P_{-1}(t+\delta t)$ που δεν υπάρχει.

$$\Rightarrow P_n(t+\delta t) = P_n(t) \cdot P_{nn}(\delta t) + P_{n-1}(t) \cdot P_{n-1\,n}(\delta t) + P_{n+1}(t) \cdot P_{n+1\,n}(\delta t) + P_j(t) \cdot P_{jn}(\delta t)$$

$$= P_n(t) \cdot \left[1-(\lambda_n+\mu_n)\cdot\delta t + o(\delta t)\right] + P_{n-1}(t)\left[\lambda_{n-1}\cdot\delta t + o(\delta t)\right] + P_{n+1}\left[\mu_{n+1}\cdot\delta t + o(\delta t)\right] + o(\delta t)\cdot P_j(t)$$

$$\Rightarrow \frac{P_n(t+\delta t) - P_n(t)}{\delta t} = P_{n-1}(t)\cdot\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n-1} - (\lambda_n+\mu_n)\cdot P_n(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d P_n(t)}{dt} + (\lambda_n+\mu_n)\cdot P_n(t) = P_{n-1}(t)\cdot\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n+1}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

$P_0(t+\delta t) = P$ (από το $X(0)=i$ να πάω στο $X(t)=0$ και $0 \to 0$ σε δt ή από το $X(0)=i$ να πάω στο $X(t)=1$ και $1 \to 0$ σε δt ή από το $X(0)=i$ να πάω στο $X(t)=j$ και $j \to 0$, $j \neq 0,1$)

$$= P_0(t)\cdot\left[1-\lambda_0\cdot\delta t + o(\delta t)\right] + P_1(t)\left[\mu_1\cdot\delta t + o(\delta t)\right] + P_j(t)\cdot o(\delta t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d P_0(t)}{dt} + \lambda_0\cdot P_0(t) = P_1(t)\cdot\mu_1}$$

Άρα, $$\frac{\partial P_n^{(t)}}{\partial t} + (\lambda_n+\mu_n)\cdot P_n^{(t)} = P_{n-1}^{(t)}\cdot \lambda_{n-1}^{(t)} + P_{n+1}^{(t)}\cdot \mu_{n+1}, \quad n=1,2,3,\dots$$

$$\frac{\partial P_0^{(t)}}{\partial t} + \lambda_0\cdot P_0^{(t)} = \mu_1\cdot P_1^{(t)}, \quad n=0$$

- Υπολογισμός οριακών πιθανοτήτων

Συμβολίζουμε με $\overline{P_n} = \lim_{t\to+\infty} P_n^{(t)}$ με $\Sigma \overline{P_n} = 1$

- $\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial P_n^{(t)}}{\partial t} = 0$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\partial P_n^{(t)}}{\partial t} + (\lambda_n+\mu_n)\cdot P_n^{(t)}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[P_{n-1}^{(t)}\cdot\lambda_{n-1} + P_{n+1}^{(t)}\cdot\mu_{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow (\lambda_n+\mu_n)\cdot\overline{P_n} = \overline{P_{n-1}}\cdot\lambda_{n-1} + \overline{P_{n+1}}\cdot\mu_{n+1}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\partial P_0^{(t)}}{\partial t} + \lambda_0 P_0^{(t)}\right] = \lim_{t\to+\infty} \mu_1\cdot P_1^{(t)}$$

$$\Rightarrow \lambda_0\cdot\overline{P_0} = \mu_1\cdot\overline{P_1}$$

Άρα, $$(\lambda_n+\mu_n)\cdot\overline{P_n} = \overline{P_{n-1}}\cdot\lambda_{n-1}^{(t)} + \overline{P_{n+1}}\cdot\mu_{n+1}$$
$$\lambda_0\cdot\overline{P_0} = \mu_1\cdot\overline{P_1}$$

για $n=1$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_1+\mu_1)\cdot\overline{P_1}=\overline{P_0}\cdot\lambda_0+\overline{P_2}\mu_2 \\ \lambda_0\overline{P_0}=\mu_1\overline{P_1}\Rightarrow\overline{P_1}=\dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\overline{P_0}\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda_1+\mu_1)\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\overline{P_0}=\overline{P_0}\lambda_0+\overline{P_2}\mu_2$$

$$\Rightarrow\overline{P_2}=\frac{\lambda_0\cdot\lambda_1}{\mu_1\cdot\mu_2}\overline{P_0}$$

για $n=2$: $\overline{P_3}=\dfrac{\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\mu_3}\cdot\overline{P_0}$

Άρα, γενική σχέση: $\overline{P_n}=\dfrac{\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\mu_3\cdot\ldots\cdot\mu_n}\cdot\overline{P_0}$

υπό την προϋπόθεση: $\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{P_n}=1$

$$\Rightarrow\overline{P_0}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_0\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\mu_3\cdot\ldots\cdot\mu_n}\right]=1\Rightarrow\overline{P_0}=\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_0\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\mu_3\cdot\ldots\cdot\mu_n}\right]^{-1}.$$

Παράδειγμα: Θεωρείστε ένα τηλεφωνικό κέντρο με m-γραμμές, η διάρκεια του τηλεφωνήματος ακολουθεί εκθετική με μέση τιμή μ. Οι κλήσεις γίνονται με κατανομή Poisson με λ. Όταν ένας συνδρομητής βρίσκει όλες τις γραμμές κατειλημμένες τότε δεν μπορεί να μπει στο σύστημα και χάνεται. Θέλουμε να προσδιορίσετε μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ποια είναι η πιθανότητα κάποιος συνδρομητής να βρει όλες τις γραμμές κατειλημμένες.

Λύση: Έστω X_t η στοχαστική διαδικασία που παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο τηλεφωνικό κέντρο με $t \in [0,+\infty)$ Πρόκειται για στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο με χώρο καταστάσεων $\{0,1,2,\ldots,m\}$. Επομένως, είναι μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων

$$P\left(\frac{\text{μια γέννηση σε χρόνο}}{\partial t}\right) = \frac{\lambda \cdot \partial t \cdot e^{-\lambda \cdot \partial t}}{1!}$$

$$= \lambda \cdot \partial t \cdot e^{-\lambda \cdot \partial t} = \lambda \cdot \partial t \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda \cdot \partial t)^n}{n!} = \lambda \cdot \partial t \left[1 - \frac{\lambda \cdot \partial t}{1!} + \frac{(\lambda \cdot \partial t)^2}{2!} - \frac{(\lambda \cdot \partial t)^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \lambda \cdot \partial t \underbrace{- \frac{(\lambda \cdot \partial t)^2}{1!} + \frac{(\lambda \cdot \partial t)^3}{2!} - \frac{(\lambda \cdot \partial t)^4}{3!} + \ldots}_{o(\partial t)}$$

$= \lambda \cdot \partial t + o(\partial t)$. Άρα $\lambda_n = \lambda$, $n = 0,1,\ldots,m-1$, $\lambda_m = 0$

Για το $\mu_n = n\cdot\mu$

Άρα, $\bar{p}_n = \dfrac{\lambda\cdot\lambda\cdot\ldots\cdot\lambda}{1\cdot\mu+2\cdot\mu+3\cdot\mu+\ldots+n\cdot\mu} = \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\cdot\bar{p}_0$, $n=1,2,\ldots,m$

$$\bar{p}_0 = \left[1+\sum_{n=1}^{m}\frac{\lambda\cdot\lambda\cdot\ldots\cdot\lambda}{n!\cdot\mu^n}\right]^{-1}$$

Άσκηση 41: Λύση

$$P(Y_i=y)=\begin{cases}1/4, & y=1\\ 1/4, & y=2\\ 1/2, & y=-2\end{cases}$$

Αποδείξεις που πρέπει να γίνουν:

i) P(τελ απορρ) = 1

$\mu = E(Y_i) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot(-2) = \frac{3}{4} - 1 \neq 0$

Άρα, αν $g(s) = E(e^{sY})$ τότε $\exists\, s_0 \neq 0 : g(s_0) = 1$

$\Rightarrow E(e^{s_0 Y}) = 1 \Rightarrow e^{s_0\cdot 1}\cdot\frac{1}{4} + e^{s_0\cdot 2}\cdot\frac{1}{4} + e^{-2s_0}\cdot\frac{1}{2} = 1$

Εφαρμόζω ταυτότητα Wald, συνεχίζω όπως στη θεωρία

Όμοια και στις 45, 47, 50.